数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 227-234

線型代数群の基本 Hermite 定数

渡部隆夫 (Watanabe Takao)
大阪大学 大学院理学研究科

Hermite 定数に関する最近の発展については, 既に [3] で解説した. この論説は, その後の一般化された Hermite 定数についての筆者の考察をまとめたものである. 詳細については [5] を見て下さい.

記号 k は大域体, 即ち, 有限次代数体または有限体上の一変数代数関数体とする. k の各素点 v に対し, k_v は k の v での完備化, $|\cdot|_v$ は k_v の正規付値を表わす. $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ はイデールノルムとする. k 上定義された代数多様体 X に対し, $X(k)$, $X(k_v)$ はそれぞれ X の k 有理点, k_v 有理点の集合とする. X がアファインのとき, $X(\mathbb{A})$ は X のアデールとする.

1 一般化された Hermite 定数

Hermite 定数の本来の定義と研究の歴史については, 簡単にではあるが, [3] で述べたので, ここでは一般化された Hermite 定数の定義から始める.

以下, この § では, k は有限次代数体, G は k 上定義された連結簡約可能線型代数群, $\pi : G \longrightarrow GL(V_\pi)$ は k 上定義された絶対既約な有限次元有理表現とする. π は絶対既約なので, 適当に固定されたボレル部分群に関して最高ウェイトベクトルを持つ. 原点と最高ウェイトベクトルを通る直線を x_π で表わす. x_π の固定化群 $Q_\pi = \{g \in G \mid \pi(g)x_\pi = x_\pi\}$ は, G の放物的部分群である. よって $X_{Q_\pi} = Q_\pi \backslash G$ は射影多様体になる. この Q_π が k 上定義された放物的部分群になるとき, π は k 上強有理的であると言われる. この場合, 写像 $g \mapsto \pi(g^{-1})x_\pi$ は, X_{Q_π} から射影空間への k 上定義された埋め込み $X_{Q_\pi} \longrightarrow \mathbb{P}V_\pi$ を与える.

以下 π は, k 上強有理的であると仮定する. k ベクトル空間 $V_\pi(k)$ の基底 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_N$ $(N = \dim V_\pi)$ を固定する. k の各素点 v に対し, $V_\pi(k_v)$ 上のノルム $||\cdot||_v : V_\pi(k_v) \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$||a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_N\mathbf{e}_N||_v = \begin{cases} (a_1^2 + \cdots + a_N^2)^{1/2} & (k_v = \mathbb{R}) \\ |a_1|_v + \cdots + |a_N|_v & (k_v = \mathbb{C}) \\ \sup(|a_1|_v, \cdots, |a_N|_v) & (k_v \text{ nonarchimedean}) \end{cases}$$

をとる. これから, アデール群の各要素 $\xi \in GL(V_\pi(\mathbb{A}))$ に対し, $V_\pi(k)$ 上の高さ $H_\xi : V_\pi(k) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$H_\xi(x) = \prod_v \|\xi_v x\|_v \qquad (x \in V_\pi(k))$$

により定義する. 積公式により, スカラー $\alpha \in k^\times$ に対して

$$H_\xi(\alpha x) = |\alpha|_{\mathbb{A}} H_\xi(x) = H_\xi(x)$$

であるから, H_ξ は射影空間 $\mathbb{P}V_\pi(k)$ 上の高さになり, 更に, 埋め込み $X_{Q_\pi}(k) \longrightarrow \mathbb{P}V_\pi(k)$ との合成により, $X_{Q_\pi}(k)$ 上の高さとみなせる.

アデール群 $G(\mathbb{A})$ の良い極大コンパクト部分群 K を一つ固定しておく. ノルムの定義から, 適当な $\xi \in GL(V_\pi(\mathbb{A}))$ をとれば

$$H_{\xi\pi(g)} = H_\xi$$

が任意の $g \in K$ で成り立つようにできる. そこで

$$\gamma_\pi(H_\xi) = \max_{g \in G(\mathbb{A})^1} \min_{x \in X_{Q_\pi}(k)} \left(\frac{H_{\xi\pi(g)}(x)}{H_\xi(x_\pi)} \right)^{2/[k:\mathbb{Q}]}$$

とおく. ここで

$$G(\mathbb{A})^1 = \{g \in G(\mathbb{A}) \mid |\chi(g)|_{\mathbb{A}} = 1 \quad ({}^\forall \chi \in \mathrm{Hom}_k(G, GL_1))\}$$

であり, 右辺の最小値と最大値は実際に存在することが示される. この $\gamma_\pi(H_\xi)$ が, [2] で最初に与えられた一般化された Hermite 定数である. (注: 講演の際は, 簡単のため拡大次数 $[k:\mathbb{Q}]$ を含まない定義を用いた.)

重要な例として, $G = GL_n$ かつ $\pi = \pi_d$ $(1 \leq d \leq n-1)$ が GL_n の d 次の外積表現の場合がある. 簡単に $Q_d = Q_{\pi_d}$ と書く. このとき X_{Q_d} は k^n の d 次元部分空間全体の成す Grassmann 多様体 $Gr_d(k^n)$ に等しく, また容易に分かるように, $\xi = 1$, $H_1(x_\pi) = 1$ とできて

$$\begin{aligned}\gamma_{\pi_d}(H_1) &= \max_{\substack{g \in GL_n(\mathbb{A}) \\ |\det g|_{\mathbb{A}} = 1}} \min_{x \in Gr_d(k^n)} H_{\pi_d(g)}(x)^{2/[k:\mathbb{Q}]} \\ &= \max_{g \in GL_n(\mathbb{A})} \min_{x \in Gr_d(k^n)} \frac{H_{\pi_d(g)}(x)^{2/[k:\mathbb{Q}]}}{|\det g|_{\mathbb{A}}^{2d/n[k:\mathbb{Q}]}}\end{aligned}$$

と書ける. これは $k = \mathbb{Q}$ で Rankin により, 一般の k で Thunder により定義された定数 $\gamma_{n,d}(k)$ に一致する. 特に $\gamma_{n,1}(\mathbb{Q})$ が本来の Hermite 定数である. Rankin–Thunder の定数は, 次の性質を満たす:

- $\gamma_{n,d}(k) = \gamma_{n,n-d}(k)$ ("双対性").
- $\gamma_{n,i}(k) \leq \gamma_{j,i}(k)\gamma_{n,j}(k)^{i/j}$ $(1 \leq i < j \leq n-1)$ ("Rankin 不等式").

これらの性質は, 後で述べるように基本 Hermite 定数に拡張される.

2 基本 Hermite 定数

一般化された Hermite 定数は, 強有理表現と射影空間上の高さに依存しているが, これから説明するようにこの依存性は本質的なものではなく, Q_π が極大放物的部分群の場合には取り除くことができる. 即ち, 最初に π を固定する代わりに, k 上定義された極大放物的部分群 Q を固定する. このとき G と Q のみに依存する定数 γ_Q が存在して, $Q_\pi = Q$ となる様な G の任意の強有理表現 π に対応する $\gamma_\pi(H_\xi)$ は γ_Q の冪で表せる, ということが証明できる.

以下 γ_Q の正確な定義を述べるために, k は任意の大域体として, G は k 上定義された連結簡約可能代数群, Q は G の k 上定義された極大放物的部分群とする. アデール群 $G(\mathbb{A})$ の良い極大コンパクト部分群 K を固定しておく. 記号を定義するために, R は G の k 上定義された任意の放物的部分群 ($R = G$ も含める) とする. R の冪単根基を U_R, Levi 部分群を M_R で表し, M_R の中心に含まれる最大の k 分裂トーラスを Z_R で表す. 一般に, R の k 有理指標全体からなる加群を $\mathbf{X}_k^*(R)$ と書く. 各 $g \in R(\mathbb{A})$ に対し, 準同型 $\vartheta_R(g) : \mathbf{X}_k^*(R) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ を,

$$\vartheta_R(g)(\chi) = |\chi(g)|_{\mathbb{A}} \qquad (\chi \in \mathbf{X}_k^*(R))$$

で定義する. これにより ϑ_R は $R(\mathbb{A})$ から $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X}_k^*(R), \mathbb{R}_+)$ への準同型になる. その核 $\mathrm{Ker}\,\vartheta_R$ を $R(\mathbb{A})^1$ で表す. $R(k)$ は自然に $R(\mathbb{A})^1$ に含まれるから, $X_Q(k) = Q(k)\backslash G(k)$ は, 等質空間 $Y_Q = Q(\mathbb{A})^1\backslash G(\mathbb{A})^1$ の部分集合とみなせる.

次に, 高さに対応する写像 $H_Q : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ を定義しよう. Q は極大なので, $\mathbf{X}_k^*(Z_G\backslash M_Q)$ はランクが 1 の自由 $\mathbb{Z}$ 加群になる. その基底を $\widehat{\alpha}_Q$ とする. $\widehat{\alpha}_Q$ の取り方には $\pm$ の自由度があるが, 最初に G の相対ルート系とその単純ルートを固定しておき, $\widehat{\alpha}_Q$ の正数倍が Q に対応する単純ルートの Z_Q への制限に一致するように取るものとする. 更に, 写像 $z_Q : G(\mathbb{A}) \longrightarrow Z_G(\mathbb{A})M_Q(\mathbb{A})^1\backslash M_Q(\mathbb{A})$ を, $g \in G(\mathbb{A})$ の岩澤分解が $g = umh$, $(u \in U_Q(\mathbb{A}),\ m \in M_Q(\mathbb{A}),\ h \in K)$ で与えられているとき, $z_Q(g) = Z_G(\mathbb{A})M_Q(\mathbb{A})^1 m$ により定義する. 一般に m は g から一意には定まらないが, 剰余類 $Z_G(\mathbb{A})M_Q(\mathbb{A})^1 m$ は m の取り方に依らず, g のみに依存する. そこで $H_Q(g) = |\widehat{\alpha}_Q(z_Q(g))|_{\mathbb{A}}^{-1}$ により, H_Q を定義する. z_Q は左 $Z_G(\mathbb{A})Q(\mathbb{A})^1$ 不変だから, H_Q は $Z_G(\mathbb{A})Q(\mathbb{A})^1\backslash G(\mathbb{A})$ 上の関数とみなせる. 自然な写像 $Y_Q \longrightarrow Z_G(\mathbb{A})Q(\mathbb{A})^1\backslash G(\mathbb{A})$ は単射になるので, H_Q は Y_Q 上でも意味を持つ.

正の数 T に対し

$$B_T = \{y \in Y_Q \mid H_Q(y) \le T\}$$

とおく. $g \in G(\mathbb{A})^1$ による $X_Q(k)$ の移動 $X_Q(k)g$ も Y_Q に含まれるから, それと B_T との共通部分 $B_T \cap X_Q(k)g$ を取ることができる. このとき次が示せる.

命題 1 任意の $g \in G(\mathbb{A})^1$ と $T > 0$ について, $B_T \cap X_Q(k)g$ は有限集合である. 従って, 各 $g \in G(\mathbb{A})^1$ に対し, 最小値

$$\Gamma_Q(g) = \min\{T > 0 \mid B_T \cap X_Q(k)g \neq \emptyset\} = \min_{y \in X_Q(k)g} H_Q(y)$$

が存在する. 更に $\Gamma_Q : G(k)\backslash G(\mathbb{A})^1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ は連続関数で, 最大値

$$\gamma(G, Q, k) = \max_{g \in G(\mathbb{A})} \Gamma_Q(g)$$

が存在する.

この $\gamma(G, Q, k)$ が最初に述べた γ_Q である. これを k, G, Q から定まる基本 Hermite 定数と呼ぶことにする. 命題の証明は, $Q_\pi = Q$ となる G の k 上の強有理表現を任意に一つ固定しておき (一般にこのような強有理表現は無限個ある), H_ξ を §1 と (正標数の場合にも) 同様に定義する. これから $G(\mathbb{A})$ 上の関数 $\Phi_{\pi,\xi}$ を

$$\Phi_{\pi,\xi}(g) = \frac{H_\xi(\pi(g^{-1})x_\pi)}{H_\xi(x_\pi)} \qquad (g \in G(\mathbb{A}))$$

で定義する. このとき π に依存する正の有理数 $\widehat{e}_\pi$ が存在して

$$\Phi_{\pi,\xi}(g) = H_Q(g)^{\widehat{e}_\pi} \qquad (g \in G(\mathbb{A})^1)$$

と表せる. この関係から, 集合 $B_T \cap X_Q(k)g$ の有限性は, 射影空間上の高さが一定の正数以下の有理点は有限個であるという事実から導かれる. また, Γ_Q の最大値の存在は, $G(k)\backslash G(\mathbb{A})^1$ の簡約理論から分かる.

k が代数的数体の場合, $\gamma_\pi(H_\xi)$ と $\gamma(G, Q, k)$ は

$$\gamma_\pi(H_\xi) = \gamma(G, Q, k)^{2\widehat{e}_\pi/[k:\mathbb{Q}]}$$

の関係を持つ. ここで $\widehat{e}_\pi$ は上と同じ有理数で, π の最高ウェイトと $\widehat{\alpha}_Q$ との関係から定まる. この等式から, $\gamma_\pi(H_\xi)$ で証明されたこと (下からの評価など) は, $\gamma(G, Q, k)$ でも成り立つ. $G = GL_n$, $Q = Q_d$ の場合には

$$\gamma_{n,d}(k) = \gamma(GL_n, Q_d, k)^{2\gcd(d,n-d)/(n[k:\mathbb{Q}])} \tag{1}$$

特に強調すべき点として, $\gamma(G,Q,k)$ の定義と本来の Hermite 定数の定義との間に見られる類似性がある. Hermite 定数 $\gamma_n = \gamma_{n,1}(\mathbb{Q})$ の一つの表示として

$$\gamma_n = \max_{\substack{g\in GL_n(\mathbb{R})\\ |\det g|=1}} \min\{T>0 \mid B_T^n \cap g\mathbb{Z}^n \neq \{0\}\}$$

がある. ここで, $\mathbb{Z}^n$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の中の標準的な格子と見ており, B_T^n は $\mathbb{R}^n$ の中の原点を中心とする半径 T の球を表す. 他方 $\gamma(G,Q,k)$ は, 定義から

$$\gamma(G,Q,k) = \max_{g\in G(\mathbb{A})^1} \min\{T>0 \mid B_T \cap X_Q(k)g \neq \emptyset\}$$

である. 即ち, $X_Q(k)$ が格子で B_T が半径 T の球の役割を果たしている. 筆者は, 論文 [4] で, k が代数的数体の場合に, 有限集合 $B_T \cap X_Q(k)g$ の要素の個数の $T\to\infty$ としたときの漸近表示の主要部は, B_T の体積に比例することを示した. この観点から見れば, 逆に $\gamma(G,Q,k)$ は, 原点の近くでの有理点の分布を測っているとも解釈できる. この方向では, Minkowski の凸体定理の類似が当然考えられるべきだが, これは筆者にとっての今後の課題である.

$\gamma(G,Q,k)$ の定義の中で, $G(\mathbb{A})^1$ を $G(\mathbb{A})$ に置き換えることにより, 定数

$$\widetilde{\gamma}(G,Q,k) = \max_{g\in G(\mathbb{A})} \min_{y\in X_Q(k)g} H_Q(y)$$

が定義できる. 但し $X_Q(k)g$ は $\widetilde{Y}_Q = Z_G(\mathbb{A})Q(\mathbb{A})^1\backslash G(\mathbb{A})$ の部分集合とみなしている. 一般に, 不等式

$$\gamma(G,Q,k) \leq \widetilde{\gamma}(G,Q,k)$$

が成り立つ. G が半単純ならば, もちろん $\gamma(G,Q,k) = \widetilde{\gamma}(G,Q,k)$ である. k が代数的数体ならば, 一般の G でも, $Y_Q = \widetilde{Y}_Q$ なので $\gamma(G,Q,k) = \widetilde{\gamma}(G,Q,k)$ が成り立つ.

3 基本 Hermite 定数の性質

k,G,Q は §2 と同じとする. $\gamma(G,Q,k)$ について次を示すことができる.

定理 1 $\ell \subset k$ は部分体で, k/ℓ は有限次分離拡大であるとする. このとき

$$\gamma(R_{k/\ell}(G), R_{k/\ell}(Q), \ell) = \gamma(G,Q,k)$$

が成り立つ. ここで $R_{k/\ell}$ は係数制限関手を表す.

定理 2 k 上定義された連結簡約可能代数群の完全列

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G \xrightarrow{\beta} G' \longrightarrow 1$$

について, Z が次の2条件を満たしているとする.

- Z は G の中心に含まれる.
- Z は $R_{k'/k}(GL_1)$ (k'/k は有限次分離拡大) の形のトーラスの直積に同型である.

このとき

$$\gamma(G,Q,k) = \gamma(G', \beta(Q), k)$$

である.

この定理は "双対性" の一般化を与えている. 即ち, $G = GL_n$, $Q = Q_d$ のとき, $\beta : G \longrightarrow G$ を外部自己同型

$$\beta(g) = w^{-1\,t}g^{-1}w, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

にとれば, $\gamma(GL_n, Q_d, k) = \gamma(GL_n, Q_{n-d}, k)$ を得る. 同様に, 外部自己同型を持つ D_n 型の群や E_6 型の群の基本 Hermite 定数の間にも等号が成り立つ.

最後に "Rankin 不等式" の一般化を与える. R は Q と異なる G の k 上定義された標準的極大放物的部分群とする. ここで, 標準的とは $R \cap Q$ が最初に固定されたボレル部分群を含むことを意味する. このとき $Q^R = M_R \cap Q$ は M_R の極大放物的部分群になり, $M_Q^R = M_R \cap M_Q$ はその Levi 部分群になる. $\mathbf{X}_k^*(Z_R \backslash M_Q^R)$ の $\mathbb{Z}$ 基底を $\widehat{\alpha}_Q^R$ で表す. $\widehat{\alpha}_Q^R$ と $\widehat{\alpha}_R|_{M_Q^R}$ は, $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $\mathbf{X}_k^*(Z_G \backslash M_Q^R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の基底を与えるので, 適当な $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Q}$ により

$$\widehat{\alpha}_Q|_{M_Q^R} = \omega_1 \widehat{\alpha}_Q^R + \omega_2 \widehat{\alpha}_R|_{M_Q^R}$$

と一意に書けて, 次が成り立つ.

定理 3 $\gamma(G,Q,k) \le \widetilde{\gamma}(M_R, Q^R, k)^{\omega_1} \gamma(G,R,k)^{\omega_2}$.

$G = GL_n$, $Q = Q_i$, $R = Q_j$ $(1 \le i < j \le n-1)$ のとき, 簡単な計算から

$$\omega_1 = \frac{n}{j}\frac{\gcd(i, j-i)}{\gcd(i, n-i)}, \qquad \omega_2 = \frac{i}{j}\frac{\gcd(j, n-j)}{\gcd(i, n-i)}$$

となる. k が代数的数体ならば, $\widetilde{\gamma}(M_R, Q^R, k) = \gamma(GL_j, Q_i', k)$ (右辺の Q_i' は GL_j の放物的部分群) だから, §2 (1) と合わせて "Rankin 不等式"

4 関数体の場合

この § では k は有限体上の一変数代数関数体とする. k の定数体を $\mathbb{F}_q$, genus を $g = g(k)$ とする. q で生成される $\mathbb{R}_+$ の中の巡回群を $q^{\mathbf{Z}}$ で表す.

定義から, $\gamma(G,Q,k) \in |\widehat{\alpha}_Q(M_Q(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1)|_{\mathbb{A}}$ である. ここで右辺は $q^{\mathbf{Z}}$ の部分群であるから, その生成元で 1 以上のものを $q_0 = q_0(Q)$ とおく. 従って, $\gamma(G,Q,k) \in q_0^{\mathbf{Z}}$ である. 平均値定理の論法から, 次の Minkowski–Hlawka 型の評価を示すことができる.

定理 4

$$\left(\frac{\omega_{\mathbb{A}}^Q(K \cap Q(\mathbb{A}))d_G^*\tau(G)}{\omega_{\mathbb{A}}^G(K)d_Q^*\tau(Q)}(1 - q_0^{-\widehat{e}_Q})\right)^{1/\widehat{e}_Q} < \gamma(G,Q,k).$$

ここで $\omega_{\mathbb{A}}^G$ は $G(\mathbb{A})$ 上の玉河測度, $\tau(G)$ は G の玉河数,

$$d_G^* = (\log q)^{\mathrm{rank}\,\mathbf{X}_k^*(G)}[\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{X}_k^*(G), q^{\mathbf{Z}}) : \mathrm{Im}\,\vartheta_G]$$

で, $\omega_{\mathbb{A}}^Q$, $\tau(Q)$, d_Q^* も同様に定義される. また $\widehat{e}_Q$ は正の有理数で, δ_Q^{-1} を $Q(\mathbb{A})$ の modular character とするとき,

$$\delta_Q(m) = |\widehat{\alpha}_Q(m)|_{\mathbb{A}}^{\widehat{e}_Q} \qquad (m \in M_Q(\mathbb{A}))$$

で定まるものとする.

例えば, $G = GL_n, Q = Q_d$ の場合, この評価は

$$\left(\frac{q^{(g-1)(d(n-d)+1)}(q-1)(1-q^{-n})}{h_k}\frac{\prod_{i=n-d+1}^{n}\zeta_k(i)}{\prod_{i=2}^{d}\zeta_k(i)}\right)^{1/\gcd(d,n-d)} < \gamma(GL_n, Q_d, k)$$

を与える. ここで, ζ_k は k の合同ゼータ関数を表し, h_k は k のゼロ因子類群の類数を表す.

上からの評価はまだ一般には示されていない. しかし $G = GL_n$ に限れば, 次が分かる.

定理 5 $G = GL_n$, $Q = Q_d$ のとき, $q_0(Q_d) = q^{n/\gcd(d,n-d)}$ で, 不等式

$$1 \leq \gamma(GL_n, Q_d, k) \leq \widetilde{\gamma}(GL_n, Q_d, k) \leq q_0(Q_d)^{dg}$$

が成り立つ.

これらの評価から, 次は容易に示せる.

系 $g=0$, 即ち k が $\mathbf{F}_q$ 上の有理関数体ならば, 任意の $2 \le n$ と $1 \le d \le n-1$ について, $\gamma(GL_n, Q_d, k) = \tilde{\gamma}(GL_n, Q_d, k) = 1$ である.

系 $g=1$, 即ち k が $\mathbf{F}_q$ 上の楕円関数体とする. このとき $h_k \le q-1$ ならば, 任意の $2 \le n$ について, $\gamma(GL_n, Q_1, k) = \tilde{\gamma}(GL_n, Q_1, k) = q^n$ である.

q を固定したとき, $h_k \le q-1$ となる $\mathbf{F}_q$ 上の楕円関数体 k は必ず存在する. このような k について, 上の系を $\gamma(GL_n, Q_1, k)$ の定義に戻って言い直せば, "$0 < T < q^n$ であるような任意の T に対し, $g_T \in GL_n(\mathbb{A})^1$ を適当に取れば, $H_{Q_1}(y) > T$ が任意の $y \in X_{Q_1}(k) g_T$ で成り立つ", となる.

任意の n について, $\gamma(GL_n, Q_1, k)$ が求まる場合があるということは, $\gamma_n = \gamma_{n,1}(\mathbb{Q})$ が $n \le 8$ までしか分かっていないことと比較すると, 特徴的である. 関数体の場合には, 無限素点における二次形式の簡約が不必要な分だけ話が幾らか簡単になっていると考えられる.

[1] で試みられているように, $\gamma(GL_n, Q_1, k)$ の値を求めるには, Voronoi 理論が有効である. 一般の G, Q で, Voronoi 理論が展開できるかは, まだ未知数である.

参考文献

[1] R. Baeza, R. Coulangeon, M. I. Icaza and M. O'Ryan, Hermite's constant for quadratic number fields, Experimental Math. (to appear).

[2] T. Watanabe, On an analog of Hermite's constant, J. Lie Theory 10 (2000), 33 - 52.

[3] T. Watanabe, A survey on generalized Hermite constants, 数理解析研究所講究録 1200 (2001), 65 - 70.

[4] T. Watanabe, The Hardy–Littlewood property of flag varieties, preprint.

[5] T. Watanabe, Fundamental Hermite constants of linear algbraic groups, preprint.